Götze, Karl; Ohrt, Gustav

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie

Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie

von

Karl Götze und Gustav Ohrt.

Verlag des Verbandes Ehemaliger Studierender
des Thüringischen Technikums zu Jlmenau.

Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie

von

Karl Götze und Gustav Ohrt.

Verlag des Verbandes Ehemaliger Studierender
des Thüringischen Technikums zu Jlmenau.

Jlmenau 1911

Druck von Richard Petermann.

Vorwort.

Das vorliegende Heft „Trigonometrie“ erhebt nicht den Anspruch, ein vollständiges Lehrbuch der Trigonometrie zu sein. Es will den Stoff dieses Unterrichtsgebietes, wie er an der hiesigen technischen Lehranstalt während zweier Semester vorgetragen wird, kurz zusammenfassen, um das bis jetzt übliche, dem Vortrage folgende Diktat entbehrlich zu machen. Zugleich soll dadurch Zeit für eine gründliche Durcharbeitung eines reicheren Übungsmaterials gewonnen werden.

Die Verfasser hoffen, daß ihr Buch als Mittel der Einprägung und zur Wiederholung ihren Schülern gute Dienste leisten wird.

Jlmenau, im Oktober 1911.

Karl Götze. Gustav Ohrt.

Einleitung.

§ 1. Aufgabe der Trigonometrie.

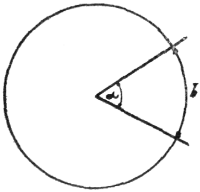
„Trigonometrie“ heißt „Dreiecksmessung.“ Auch die Planimetrie beschäftigt sich mit der Ausmessung und Berechnung von Dreiecken aus gegebenen Stücken. Die zeichnerische Methode, welche sie zumeist anwendet, läßt aber die Lösung solcher Aufgaben nur in verhältnismäßig wenigen Fällen zu, nämlich nur dann, wenn es sich um konstruierbare Winkel handelt. In allen anderen Fällen führt sie auf sehr ungenaue Resultate, weil sie nicht imstande ist, die Seiten und Winkel eines Dreiecks, die mit verschiedenen Maßen gemessen werden (Längenmaß, Gradmaß), zu einander in Beziehung zu bringen.

Die Trigonometrie hat die Aufgabe, ein Dreieck aus **allen** Bestimmungsstücken, also aus **Seiten und Winkeln,** zu berechnen. Die Lösung dieser Aufgabe setzt voraus, daß für die Messung der Winkel ein Maß eingeführt wird, das sich mit den Seitenmaßen rechnerisch verbinden läßt.

I. Abschnitt. Die goniometrischen Funktionen spitzer Winkel.

§ 2. Das Bogenmaß.

Denkt man sich um den Scheitel des Winkels α mit beliebigem Radius einen Kreis beschrieben, so ist der nächstliegende Gedanke, anstelle des Gradmaßes die Länge des Kreisbogens zwischen den Schenkeln zur Messung zu benutzen. Diese Bogenlänge hängt allerdings nicht allein von der Größe des Winkels ab, sondern auch von der Länge des Radius. Benutzt man diesen Radius bei allen vorzunehmenden Messungen



als Maßeinheit, (man sagt: man setzt den Radius = 1) so ist die Größe des Winkels α durch die Verhältniszahl „Bogenlänge gemessen durch Radius“ bestimmt.

Die Länge des Bogens b steht zum ganzen Kreisumfang U in demselben Verhältnis, wie α zu 360. Also ist

$$b : U = \alpha : 360$$

$$b = U \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

Da $U = 2 r \pi$, so wird

$$b = 2 r \pi \cdot \frac{\alpha}{360} = r \pi \cdot \frac{\alpha}{180}$$

für $r = 1$ erhält man

$$b = \pi \cdot \frac{\alpha}{180}.$$

Ist $\alpha = 1^0$, so ist die Bogenlänge

$$b = \frac{\pi}{180} = 0{,}01745\ 329\ \ldots .$$

Man führe die entsprechende Rechnung für $\alpha = 1'$ und $\alpha = 1''$ aus!

Als allgemeines Resultat dieser Betrachtung gewinnt man: **Der Bogen ist vom zugehörigen $\sphericalangle\, \alpha$ in der Weise abhängig, daß jedem $\sphericalangle\, \alpha$ ein bestimmter Bogen zugehört.**

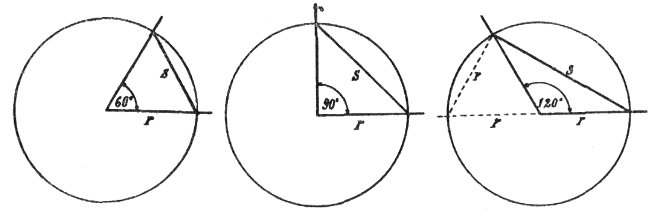
§ 3. Erklärung.

Sind zwei Größen derart von einander abhängig, daß einer Veränderung der einen Größe eine gesetzmäßig erfolgende Änderung der anderen Größe entspricht, **so heißt die eine Größe eine Funktion der andern.** (Temperatur und Volumen eines Körpers; Druck und Volumen eines Gases; Entfernung der Lichtquelle und Beleuchtungsstärke; usw.)

Die Bogenlänge ist eine Funktion des Winkels.

§ 4. Das Sehnenmaß.

Anstelle des Bogenmaßes kann zur Messung des Winkels das **Sehnenmaß** benutzt werden, denn auch **die Länge der Sehne** hängt von der Größe des Winkels ab, ist also **eine Funktion des Winkels.** Man nennt sie **chord Funktionen** (chorda = Sehne). Auch hier wird man den Radius = 1 setzen und die Länge der Sehne durch den Radius messen.



Beispiele:

$$\text{chord } 0^0 = 0$$

$$\text{chord } 60^0 = r = 1$$

$$\text{chord } 90^0 = \sqrt{2} = 1{,}414213 \ldots$$

denn:

$$s^2 = 2r^2$$

$$s = r\sqrt{2} \quad \text{und für } r = 1$$

$$s = \sqrt{2}$$

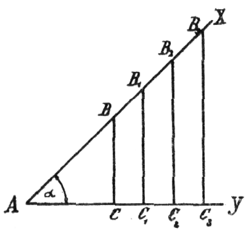
$$\text{chord } 120^0 = \sqrt{3} = 1{,}73205 \ldots$$

denn:
$$s^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2$$
$$s = r\sqrt{3} \quad \text{und für } r = 1$$
$$s = \sqrt{3}$$
$$\text{chord } 180^0 = 2.$$

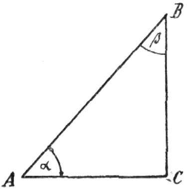
Die chord Funktionen sind früher in der Trigonometrie in Gebrauch gewesen (Hipparch, Menelaus, Ptolemäus). Sie lassen aber keine allgemeine Verwendung zu, weil man bei ihrer Benutzung die Berechnung des ungleichseitigen Dreiecks auf die des gleichschenkligen zurückführen muß. Da nun das gleichschenklige Dreieck durch ein Lot aus der Spitze in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird, ist es vorteilhafter, überhaupt auf das rechtwinklige Dreieck zurückzugehen.

§ 5. Die trigonometrischen Funktionen als Seitenverhältnisse rechtwinkliger Dreiecke.

Fällt man von den auf AX beliebig gewählten Punkten B, B_1, B_2, B_3 usw. Lote auf AY, so entstehen ähnliche rechtwinklige Dreiecke, d. h. Dreiecke, deren homologe Seiten im gleichen Verhältnis stehen. Dieses **Seitenverhältnis** ist ausschließlich abhängig von der Größe des Winkels, es **ist also eine Funktion desselben,** und kann daher so wie das Bogen- und Sehnenmaß als Mittel zu seiner Messung benutzt werden.



Bei der Verwendung des rechtwinkligen Dreiecks hat man gegenüber den in § 2 und § 4 besprochenen Methoden noch den Vorteil einer größeren Mannigfaltigkeit rechnerischer Hilfsmittel, denn es lassen sich unter den 3 Seiten 6 verschiedene Verhältnisse je zweier Seiten aufstellen.



Diese sind:

$$\frac{a}{c}, \quad \frac{b}{c}, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{c}{a}, \quad \frac{c}{b}, \quad \frac{b}{a}.$$

So wie jedes dieser Verhältnisse abhängig ist von der Größe des Winkels, ist auch umgekehrt der Winkel durch jedes Verhältnis bestimmt.

§ 6. Benennung der trigonometrischen Funktionen.

Von diesen 6 Verhältnissen benutzt man in der elementaren Trigonometrie in der Regel nur 4, nämlich

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b} \text{ und den reziproken Wert } \frac{b}{a}.$$

Diese 4 Seitenverhältnisse führen als Funktionen des Winkels besondere Namen. Man nennt:

$\frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$ die **sinus Funktion** $[\sin\alpha]$

$\frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ die **cosinus Funktion** $[\cos\alpha]$

$\frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ die **tangens Funktion** $[\mathrm{tg}\,\alpha]$

$\frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$ die **cotangens Funktion** $[\mathrm{ctg}\,\alpha]$

Es ist also

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

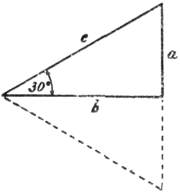
$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg} a = \frac{b}{a}$$

§ 7. Berechnung der Größe dieser Verhältniszahlen für einige Winkel.

I. Für $\alpha = 30^0$.



In dem Dreieck ist $\mathbf{c = 2a}$, ferner

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$\mathbf{b = a\sqrt{3}}$$

$$\sin 30^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{\sin 30^0 = 0{,}5}$$

$$\cos 30^0 = \frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{\cos 30^0 = 0{,}86603} \ldots\ldots$$

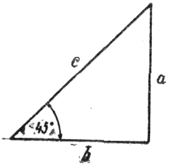
$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} 30^0 = 0{,}57735} \ldots\ldots$$

$$\operatorname{ctg} 30^0 = \frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{\operatorname{ctg} 30^0 = 1{,}73205} \ldots\ldots$$

II. Für $\alpha = 45^0$.



Es ist $\mathbf{b = a}$

$$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\mathbf{c = a\sqrt{2}}$$

$$\sin 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 45^0 = 0{,}707106\ \ldots\ldots$$

$$\cos 45^0 = \frac{b}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^0 = 0{,}707106\ \ldots\ldots$$

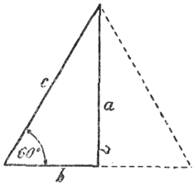
$$\mathrm{tg}\ 45^0 = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\mathrm{tg}\ 45^0 = 1$$

$$\mathrm{ctg}\ 45^0 = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\mathrm{ctg}\ 45^0 = 1.$$

III. Für $\alpha = 60^0$.



Es ist (siehe bei 30^0):

$$c = 2b$$

$$a = b \cdot \sqrt{3}$$

$$\sin 60^0 = \frac{a}{c} = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 60^0 = 0{,}86603\ \ldots\ldots$$

$$\cos 60^0 = \frac{b}{c} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^0 = 0{,}5$$

$$\mathrm{tg}\ 60^0 = \frac{a}{b} = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{b} = \sqrt{3}$$

$$\mathrm{tg}\ 60^0 = 1{,}73205\ \ldots\ldots$$

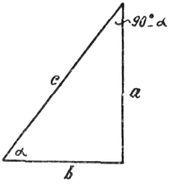
$$\mathrm{ctg}\ 60^0 = \frac{b}{a} = \frac{b}{b \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\mathrm{ctg}\ 60^0 = 0{,}57735\ \ldots\ldots$$

Fundamentalbeziehungen unter den goniometrischen Funktionen.

§ 8. Lehrsatz 1. Die Funktion eines spitzen Winkels ist gleich der Cofunktion seines Complementwinkels.

Die Richtigkeit des Satzes ergibt sich unmittelbar aus der Figur, denn:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\,(90^0 - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\,(90^0 - \alpha)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\,(90^0 - \alpha)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\,(90^0 - \alpha)$$

§ 9. Lehrsatz 2. Die Summe der Quadrate vom sinus und cosinus desselben Winkels ist stets gleich 1.

Beh. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Bew. Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Dividiert man diese Gleichung durch c^2, so erhält man

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1;\ \text{das ist:}$$

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Folgerungen:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

§ 10. Lehrsatz 3. Die tangens Funktion ist gleich dem Quotienten aus sin und cos, die cotangens Funktion gleich dem Quotienten aus cos und sin.

Beh.
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Bew. Nach der Figur ist:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\,\alpha$$

§ 11. Lehrsatz 4. Das Produkt aus tg α und ctg α ist stets gleich 1

(oder: tg α und ctg α sind reziproke Werte.)

Beh.
$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha} \\[2ex] \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha} \end{array}\right]$$

Bew.
$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Geometrische Darstellung der trigon. Funktionen.

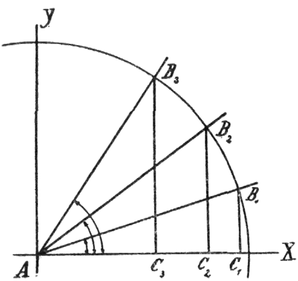
§ 12. Allgemeines.

Um über den Verlauf einer veränderlichen Größe einen Überblick zu gewinnen, bedient man sich mit Vorteil der geometrischen Darstellung.

Für die Darstellung der trigon. Funktionen denken wir uns den Winkel α als eine veränderliche Größe, die sich (vorläufig) zwischen 0^0 und 90^0 bewegen soll. Der eine Schenkel wird festliegend, der andere beweglich angenommen. Bei der Drehung um den Scheitel beschreibt dann irgend ein Punkt des beweglichen Schenkels einen Kreisbogen, dessen Radius auch hier gleich 1 gesetzt wird. Der Sinn dieser Festsetzung ist:

Der Radius soll als Maßeinheit benutzt und alle vorkommenden Längen sollen durch diese Einheit gemessen werden. Selbstverständlich ist dabei nicht erforderlich, daß der Radius gleich einem der gebräuchlichen Längenmaße (Meter, Dezimeter, Centimeter usw.) gesetzt werde.

§ 13. Geometrische Darstellung der sin Funktion.



Wird der Schenkel AB um den Scheitel A gedreht, sodaß die Winkel α_1, α_2, α_3 usw. entstehen, und fällt man von dem Endpunkte des Radius die Lote B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 usw. auf AX, so entstehen rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse stets dieselbe Größe hat.

Da nun der $\sin \alpha$ das Verhältnis der gegenüberl. Kathete zur Hypotenuse ist, diese Hypotenuse aber ihren Wert nicht ändert, so werden die Veränderungen der sinus Funktion allein sichtbar an den Veränderungen des Lotes BC.

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} \text{ und für } AB = 1:$$

$$\sin \alpha_1 = B_1C_1$$

$$\sin \alpha_2 = B_2C_2$$

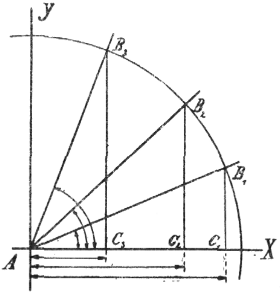
$$\sin \alpha_3 = B_3C_3 \quad \text{usw.}$$

Man erkennt aus der Figur:

1. **Daß die sinus Funktion mit wachsendem Winkel zunimmt.**
2. **Daß dieses Wachstum zuerst (von 0° an) am schnellsten, bei 90° am langsamsten erfolgt.**
3. Für $\alpha = 0^0$ beträgt die Länge des Lotes 0, daher ist: **sin 0° = 0.**
4. Für $\alpha = 90^0$ wird das Lot gleich dem Radius 1, daher ist: **sin 90° = 1.**

Zusammenfassung: Der sinus bewegt sich in den Grenzen von 0 bis 1, er wird also stets durch einen echten Bruch dargestellt.

§ 14. Geometrische Darstellung der cos Funktion.



Man konstruiere wie in § 13. Der cosinus ist das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \text{ und für } AB = 1:$$

$$\cos \alpha_1 = AC_1$$

$$\cos \alpha_2 = AC_2$$

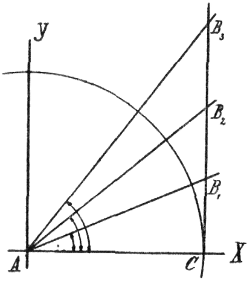
$$\cos \alpha_3 = AC_3 \quad \text{usw.}$$

Man erkennt aus der Figur:

1. **Daß die cosinus Funktion mit wachsendem Winkel abnimmt.**
2. **Daß diese Abnahme bei 0° am langsamsten, bei 90° am schnellsten erfolgt.**
3. Für $\alpha = 0^0$ ist die anliegende Kathete gleich dem Radius 1, daher ist: **cos 0° = 1.**
4. Für $\alpha = 90^0$ ist die anl. Kathete gleich 0, daher ist: **cos 90° = 0.**

Zuzammenfassung: Die cosinus Funktion bewegt sich in den Grenzen von 1 bis 0, sie wird daher stets durch einen echten Bruch dargestellt.

§ 15. Geometrische Darstellung der tangens Funktion.



Da die tangens Funktion das Verhältnis der gegenüberliegenden zur anliegenden Kathete ist, so kann die bisherige geometrische Darstellungsweise keine Verwendung finden, weil der Vorteil, durch den Radius 1 zu messen, verloren gehen würde. Das tritt nicht ein, wenn man im Endpunkte C des festen Schenkels eine Tangente an den Kreis konstruiert, auf welcher der bewegliche Schenkel von α entsprechende Stücke abschneidet. Dann ist

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{BC}}{\text{AC}} \text{ und für AC} = 1:$$

$$\text{tg}\,\alpha_1 = \text{B}_1\text{C}$$

$$\text{tg}\,\alpha_2 = \text{B}_2\text{C}$$

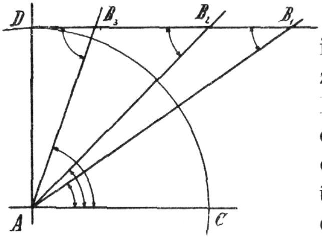
$$\text{tg}\,\alpha_3 = \text{B}_3\text{C} \quad \text{usw.}$$

Man erkennt aus der Figur:

1. **Daß die tangens Funktion mit wachsendem Winkel zunimmt.**
2. **Daß diese Zunahme um so rascher erfolgt, je größer der Winkel wird.**
3. Für $\alpha = 0^0$ ist die Länge des Abschnittes BC $= 0$, daher ist: **tg $0^0 = 0$.**
4. Für $\alpha = 90^0$ wird die Länge des Abschnittes unendlich, weil der bewegliche Schenkel der Kreistangente parallel wird. Daher ist: **tg $90^0 = \infty$.**

Zusammenfassung: Die tangens Funktion bewegt sich in den Grenzen von 0 bis ∞. Sie kann also gleich jedem beliebigen Zahlenwert innerhalb dieser Grenzen sein.

§ 16. Geometrische Darstellung der cotangens Funktion.



Die cotangens Funktion ist das Verhältnis der anl. zur gegenüberl. Kathete. Es ist daher notwendig, eine Konstruktion zu finden, bei welcher die gegenüberlieg. Kathete gleich der Einheit gesetzt werden kann. Das läßt sich in folgender Weise erreichen:

Man konstruiere im Endpunkte D des Radius AD eine Tangente an den Kreis, auf welcher der bewegliche Schenkel AB entsprechende Stücke abschneidet. Die Winkel α_1, α_2, α_3 usw. treten auch an den Punkten B_1, B_2, B_3 als Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen auf. Daher ist:

$$\text{ctg}\,\alpha = \frac{BD}{AD} \text{ und für } AD = 1:$$

$$\text{ctg}\,\alpha_1 = B_1D$$
$$\text{ctg}\,\alpha_2 = B_2D$$
$$\text{ctg}\,\alpha_3 = B_3D \quad \text{usw.}$$

Man erkennt aus der Figur:

1. **Daß die cotangens Funktion mit wachsendem Winkel abnimmt.**
2. **Daß diese Abnahme um so langsamer erfolgt, je größer der Winkel wird.**
3. Für $\alpha = 0^0$ ist die Länge des Abschnittes unendlich, weil der bewegliche Schenkel dann mit der Kreistangente in D parallel ist. Daher ist: **ctg 0°** $= \infty$.
4. Für $\alpha = 90^0$ wird BD $= 0$, daher ist: **ctg 90°** $=$ **0.**

Zusammenfassung. Die cotangens Funktion bewegt sich in den Grenzen von ∞ bis 0, sie kann also jeden beliebigen Zahlenwert innerhalb dieser Grenzen annehmen.

§ 17. Zusammenstellung der bisher ermittelten Funktionswerte.

	sinus	cosinus	tangens	cotangens
$\alpha = 0^0$	0	1	0	∞
$\alpha = 30^0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\alpha = 45^0$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	1	1
$\alpha = 60^0$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\alpha = 90^0$	1	0	∞	0

§ 18. Einführung in die Tafel der natürlichen trigonometrischen Funktionen.

1. Die Untersuchungen über den Verlauf der trigonometrischen Funktionen haben ergeben, daß keine der 4 Funktionen proportional mit den Veränderungen des Winkels wächst oder abnimmt. Daraus folgt, daß man aus der Größe des Funktionswertes eines Winkels nicht auf die Größe des Funktionswertes eines andern schließen kann, wie dies z. B. ohne weiteres beim Bogenmaß § 2 möglich ist. Es ist daher notwendig, für jeden einzelnen Winkel den zugehörigen Funktionswert zu berechnen. Aus später ersichtlichen Gründen kann man sich dabei auf die spitzen Winkel beschränken. Aber auch hier ist noch eine weitere Beschränkung möglich. Da nämlich nach § 8

$$\sin\alpha = \cos(90^0 - \alpha)$$

usw. ist, braucht man in der Tat nur die Funktionswerte der Winkel von $0^0 \div 45^0$ zu berechnen.

$$\sin 46^0 = \cos 44^0$$

$$\operatorname{tg} 72^0 = \operatorname{ctg} 18^0$$

2. Die meisten Funktionswerte sind irrationale Zahlen, d. h. Dezimalbrüche von unendlich großer Stellenzahl ohne Periode. Man muß sich daher vorher entscheiden, mit wievielen Dezimalstellen man rechnen will. Die Anzahl derselben richtet sich natürlich nach dem Grade der erforderlichen Genauigkeit, ebenso danach, ob man nur mit ganzen Graden oder auch mit Minuten oder endlich noch mit Sekunden rechnen will.

3. Wenn es nun zunächst auch erforderlich scheint, für jeden denkbaren Winkel die Funktionswerte zu bestimmen, so ergibt sich doch bei näherer Überlegung, daß man zwischen den Winkeln gewisse Intervalle lassen darf. Berechnet man z. B. auf 5 Dezimalstellen die Funktionswerte für alle Winkel von 10 zu 10 Minuten, so reicht diese Rechnung noch für den Fall aus, daß man Minuteneinheiten verwenden muß. Nach den Tafeln ist:

$$\sin 42^0\ 20' = 0{,}67344$$
$$\sin 42^0\ 30' = 0{,}67559.$$

Die Zunahme des Winkels beträgt 10'. Ihr entspricht ein Wachstum des Funktionswertes um 0,00215 oder um 215 Einheiten der letzten Dezimale. Obwohl das Wachstum der Funktion nicht proportional dem Wachstum des Winkels erfolgt, treten doch bei kleinen Winkelintervallen die Abweichungen erst auf später folgenden Dezimalstellen auf. Man begeht daher keinen Fehler, wenn man aus dem Zuwachs von 215 für 10' folgert, daß der Zuwachs für 1' $\frac{1}{10}$ davon, also 21,5 ist. Für 6' würde er also $6 \cdot 21{,}5 = 129$ betragen. Also ist

$$\begin{aligned} \sin 42^0\ 20' &= 0{,}67344 \\ \text{Zuwachs für } 6' &= \phantom{0{,}67}129 \\ \sin 42^0\ 26' &= 0{,}67473. \end{aligned}$$

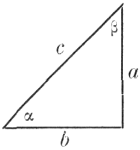
Dieses Verfahren, die Funktionswerte für die in der Tafel nicht enthaltenen Winkel auf die angegebene Weise zu ermitteln, heißt das **Interpolationsverfahren.** Beim Interpolieren hat man natürlich den Gang der Funktion zu berücksichtigen, d. h. die Differenzen zu addieren oder zu subtrahieren, je nachdem die Funktion wächst oder abnimmt (und je nachdem man vom größeren oder kleineren Winkel ausgeht).

Die Differenzen für 1' lassen sich direkt aus den Tafeln entnehmen, und zwar aus den mit D 1' überschriebenen Spalten.

4. Soll zu einem gegebenen Funktionswert der Winkel bestimmt werden, so ist der Rechnungsgang der umgekehrte. Man suche in der Tafel den Wert auf, welcher dem gegebenen am nächsten kommt und bestimme den Unterschied in den letzten Dezimalen. Dividiert man diesen Unterschied durch die in der Tafel angegebene Minutendifferenz, so erhält man die Anzahl der Minuten, um welche sich der gesuchte Winkel von dem in der Tafel enthaltenen unterscheidet. Auch hier ist der Gang der Funktion zu berücksichtigen und ferner zu beachten, ob man vom größeren oder kleineren Winkel ausgeht.

II. Abschnitt. Anwendungen der goniometrischen Funktionen spitzer Winkel auf rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke und auf regelmäßige Vielecke.

§ 19. Grundaufgaben über das rechtwinklige Dreieck.



Aufgabe 1. Gegeben: eine Kathete und die Hypotenuse. Beispiel **a** und **c**.

Gesucht: die Winkel α und β.

Lösung: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$$\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Aufgabe 2. Gegeben: die beiden Katheten **a** und **b**.

Gesucht: die Winkel α und β.

Lösung: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$$\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Aufgabe 3. **Gegeben:** die Hypotenuse und ein Winkel. Beispiel: **c** und α.

Gesucht: **a, b** und der Inhalt **F**.

Lösung: a) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$$\mathbf{a} = \mathbf{c \cdot \sin}\,\alpha$$

b) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$$\mathbf{b} = \mathbf{c \cdot \cos}\,\alpha$$

c) $F = \frac{a \cdot b}{2}$

$$F = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot c \cdot \cos\alpha}{2}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{c^2 \cdot \sin}\,\alpha \cdot \mathbf{\cos}\,\alpha}{\mathbf{2}}.$$

Aufgabe 4. **Gegeben:** eine Kathete und ein Winkel. Beispiel: **a** und α.

Gesucht: b, c und F.

Lösung: a) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

$$\mathbf{b} = \mathbf{a \cdot ctg}\,\alpha$$

b) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$$c \cdot \sin\alpha = a$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sin}\,\alpha}$$

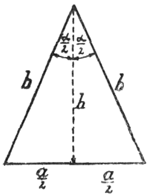
c) $F = \frac{a \cdot b}{2}$

$$F = \frac{a \cdot a \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{2}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{a^2 \cdot ctg}\,\alpha}{\mathbf{2}}.$$

§ 20. Grundaufgaben über das gleichschenklige Dreieck.

Die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks schließt sich unmittelbar an die Berechnung des rechtwinkligen an, weil das gleichschenklige Dreieck durch ein Lot aus der Spitze auf die Basis in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird.



Die Aufgaben über die Berechnung der Winkel und Seiten sind daher denen am rechtwinkligen Dreieck analog.

Aufgabe 1. **Gegeben:** **a** und α.

Gesucht: F.

Lösung:
$$F = \frac{a}{2} \cdot h$$
$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$
$$h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$
$$\mathbf{F = \frac{a^2}{4} \cdot ctg \frac{\alpha}{2}}.$$

Aufgabe 2. **Gegeben:** **b** und α

Gesucht: F.

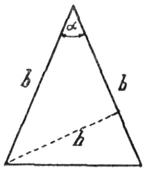
Lösung a:
$$F = \frac{a}{2} \cdot h$$
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b}$$
$$\mathbf{\frac{a}{2} = b \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$F = b^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Lösung b: Eine einfachere Formel für den Flächeninhalt gewinnt man, wenn man den gegebenen Schenkel b als Grundlinie für das Dreieck wählt und die Höhe vom Scheitel eines Basiswinkels auf b fällt. Dann ist:



$$F = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$

$$h = b \cdot \sin\alpha$$

$$F = \frac{b^2 \cdot \sin\alpha}{2}.$$

Anmerkung. Die beiden für F gefundenen Ausdrücke sind gleich, also

$$\frac{b^2 \cdot \sin\alpha}{2} = b^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\sin\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

§ 21. Grundaufgaben über das regelmäßige Vieleck.

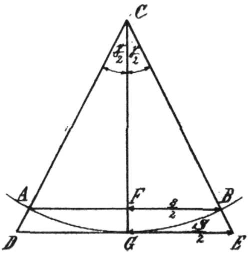
Jedes regelmäßige n Eck kann in n kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden (Bestimmungsdreieck). Seine Berechnung beruht daher direkt auf der Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks. Der Centriwinkel γ ist durch die Seitenzahl n bestimmt: $\gamma = \frac{360^0}{n}$. Es ist daher möglich, das regelmäßige Vieleck auf trigonometrischem Wege aus zwei gegebenen Stücken zu berechnen. Die trigonometrische Berechnung gestaltet sich in den weitaus meisten Fällen einfacher als die planimetrische.

Wir bezeichnen mit:

s die Seite des einbeschriebenen Vielecks
S „ „ „ umbeschriebenen „
f den Inhalt „ einbeschriebenen „
F „ „ „ umbeschriebenen „
r „ Radius „ einbeschriebenen Kreises
R „ „ „ umbeschriebenen „
n die Seitenzahl

$\gamma = \frac{360^0}{n}$ den Centriwinkel

$\frac{\gamma}{2} = \frac{180^0}{n}$ den halben Centriwinkel.



Aufgabe 1.

Gegeben: R und n.

Gesucht: s und f.

Lösung: a)

$$\sin\frac{180^0}{n} = \frac{\frac{s}{2}}{R} = \frac{s}{2R}$$

$$\mathbf{s = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{n}}$$

$$\text{b)}\quad f = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin \frac{360^0}{n}}{2}$$

$$f = \frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot \sin \frac{360^0}{n}.$$

Aufgabe 2. **Gegeben:** r und n.

Gesucht: S und F.

Lösung: $\text{a)}\quad \operatorname{tg} \frac{180^0}{n} = \frac{\frac{S}{2}}{r} = \frac{S}{2\,r}$

$$S = 2 \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$$

$$\text{b)}\quad F = n \cdot \frac{S}{2} \cdot r$$

$$F = n \cdot r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n} \cdot r$$

$$F = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}.$$

Aufgabe 3. **Gegeben:** S und n.

Gesucht: s.

Lösung: FB : GE = CB : CE

$$\frac{s}{2} : \frac{S}{2} = r : R$$

$$\frac{s}{S} = \frac{r}{R} = \frac{CG}{CE} = \cos \frac{180^0}{n}$$

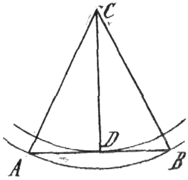
$$s = S \cdot \cos \frac{180^0}{n},$$

Aufgabe 4. **Gegeben:** s und n.

Gesucht: S.

Lösung: Aus 3 folgt:

$$S = \frac{s}{\cos \frac{180^0}{n}}.$$



Aufgabe 5.

Gegeben: R und n.

Gesucht: r.

Lösung: $\cos \frac{180^0}{n} = \frac{CD}{BC} = \frac{r}{R}$

$$r = R \cdot \cos \frac{180^0}{n}.$$

Aufgabe 6. **Gegeben**: r und n.

Gesucht: R.

Lösung: Aus Aufgabe 5 folgt:

$$R = \frac{r}{\cos \frac{180^0}{n}}.$$

Aufgabe 7. Aus der Seite eines umbeschriebenen oder einbeschriebenen n Ecks den Inhalt zu berechnen.

Lösung:

$$F = n \cdot \frac{s}{2} \cdot h$$

$$\operatorname{ctg} \frac{180^0}{n} = \frac{h}{\frac{s}{2}}$$

$$h = \frac{s}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$$

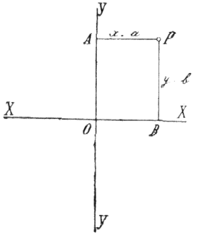
$$F = n \cdot \frac{s^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}.$$

III. Abschnitt. Die goniometrischen Funktionen der Winkel von $0^0 \div 360^0$.

§ 22. Die Einführung des rechtwinkligen Koordinatensystems.

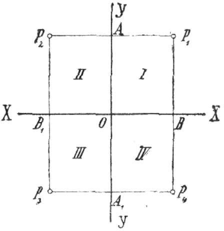
Um die goniometrischen Funktionen in dem erweiterten Winkelbereich von $0^0 \div 360^0$ definieren und graphisch darstellen zu können, bedürfen wir einiger Grundbegriffe und Hilfsmittel der analytischen Geometrie der Ebene.

Die einfachste Aufgabe der analytischen Geometrie ist, einen Punkt der Ebene seiner Lage nach durch Gleichungen zu bestimmen. Man nimmt zu ihrer Lösung zwei sich senkrecht schneidende festliegende Geraden an, welche man **Koordinatenachsen** nennt. Die eine Achse XX heißt die **X-** oder die **Abszissenachse**, die andere YY die **Y-** oder die **Ordinatenachse.** Ihren Schnittpunkt bezeichnet man als den **Koordinatenanfang.**



Es sei nun die Lage des Punktes P zu bestimmen. Zu diesem Zwecke zieht man durch P zwei Parallelen zu den Achsen, welche diese in den Punkten A und B treffen. Sie stehen bei einem rechtwinkligen Koordinatensystem auf den Achsen senkrecht und heißen die **Koordinaten** des Punktes P. Den Achsen entsprechend nennt man PA die **Abszisse** und PB die **Ordinate** des Punktes P. Mißt man beide Koordinaten mit derselben Längeneinheit, und sind die bei der Messung gefundenen Maßzahlen a und b, so wird durch die beiden Angaben PA = a und PB = b der Punkt P seiner Lage nach in bezug auf das Koordinatensystem mit dem Anfange O bestimmt. Man pflegt die Abszisse mit x, die Ordinate mit y zu bezeichnen, und gewinnt daher für den Punkt P die beiden Gleichungen $x = a$ und $y = b$. Um ihn aufzusuchen, hat man daher zur X-Achse im Abstande b und zur Y-Achse im Abstande a die Parallelen zu ziehen.

Man erkennt nun sofort, daß diese Parallelen oberhalb oder unterhalb der X-Achse und rechts oder links der Y-Achse in den verlangten Abständen gezogen werden können, sodaß also der Punkt P durch die Gleichungen $x = a$; $y = b$ nicht eindeutig, sondern vierdeutig bestimmt ist.



Um die Lage des Punktes P eindeutig festzulegen, hat man allgemein folgende Bestimmungen getroffen:

Die Abszissen aller Punkte rechts von der Y-Achse und die Ordinaten aller Punkte oberhalb der X-Achse werden als positiv, die Abszissen aller Punkte links von der Y-Achse und die Ordinaten aller Punkte unterhalb der X-Achse als negativ angenommen.

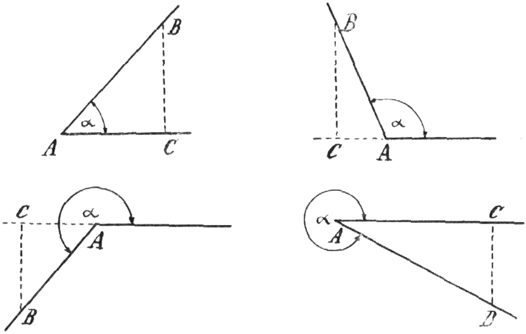
Durch die Achsen wird die Ebene in 4 Felder (Quadranten) eingeteilt, welche dem Sinne des Uhrzeigers entgegengesetzt gezählt werden.

Die Lage der Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 wird nach diesen Festsetzungen durch folgende Gleichungen bestimmt:

I.	Quadrant:	$P_1 : x = +a;\ y = +b$
II.	„	$P_2 : x = -a;\ y = +b$
III.	„	$P_3 : x = -a;\ y = -b$
IV.	„	$P_4 : x = +a;\ y = -b.$

§ 23. Erweiterung des Begriffes der goniometrischen Funktionen.

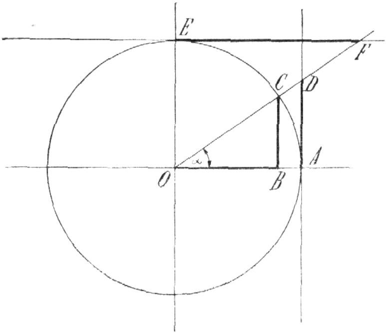
Für die Lösung der in den §§ 19, 20 und 21 behandelten Aufgaben waren die Funktionen spitzer Winkel ausreichend. Die weiteren Probleme der trigonometrischen Rechnung, z. B. die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks, machen eine Erweiterung des Begriffes der goniometrischen Funktionen notwendig.



Wir setzen fest:

1. **Die sinus Funktion irgend eines Winkels ist das Verhältnis des Projektionslotes zum projizierten Schenkel (Ordinate zum Radius).**
2. **Die cosinus Funktion irgend eines Winkels ist das Verhältnis der Projektion zum projizierten Schenkel (Abszisse zum Radius).**
3. **Die tangens Funktion irgend eines Winkels ist das Verhältnis des Projektionslotes zur Projektion (Ordinate zur Abszisse).**
4. **Die contangens Funktion irgend eines Winkels ist das Verhältnis der Projektion zum Projektionslot (Abszisse zur Ordinate).**

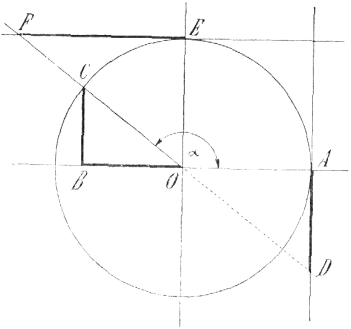
§ 24. Geometrische Darstellung der goniometrischen Funktionen im erweiterten Winkelbereiche.



a. Im ersten Quadranten.

Über die geometrische Darstellung der 4 Funktionen im ersten Quadranten s. §§ 13 bis 16.

Nach den Festsetzungen des §§ 22 sind sämtliche Funktionen dieses Quadranten **positiv.**



b. Im zweiten Quadranten.

Wird wie bisher der Radius des Kreises gleich 1 gesetzt, so ist

$$\sin \alpha = \frac{BC}{1} = BC$$

$$\cos \alpha = \frac{OB}{1} = OB.$$

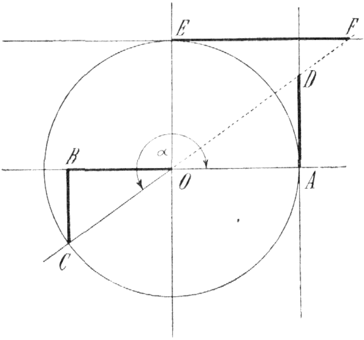
Der bewegliche Schenkel OB bezw. seine Verlängerung schneidet die in A und E an den Kreis gelegten Tangenten in den Punkten D und F. Daher ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{1} = AD$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{EF}{1} = EF.$$

Dem Richtungssinne zufolge, der diesen Strecken nach § 22 beigelegt ist, wird im zweiten Quadranten:

der **sinus positiv**
„ **cosinus negativ**
die **tangente negativ**
„ **cotangente negativ.**



c. Im dritten Quadranten.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{1} = BC$$

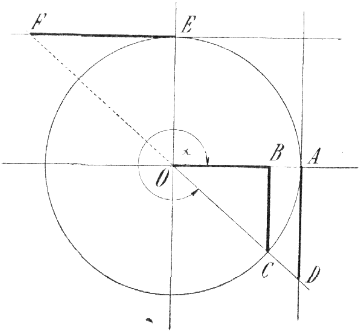
$$\cos\alpha = \frac{OB}{1} = OB$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{1} = AD$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{EF}{1} = EF.$$

Nach § 22 wird im dritten Quadranten:

der **sinus negativ**
„ **cosinus negativ**
die **tangente positiv**
„ **cotangente positiv.**



d. Im vierten Quadranten.

$$\sin\alpha = \frac{BC}{1} = BC$$

$$\cos\alpha = \frac{OB}{1} = OB$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{1} = AD$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{EF}{1} = EF.$$

Nach § 22 wird im vierten Quadranten:

der **sinus negativ**
„ **cosinus positiv**
die **tangente negativ**
„ **cotangente negativ.**

Zusammenstellung.

Quadrant	I	II	III	IV
sin α	+	+	—	—
cos α	+	—	—	+
tg α	+	—	+	—
ctg α	+	—	+	—

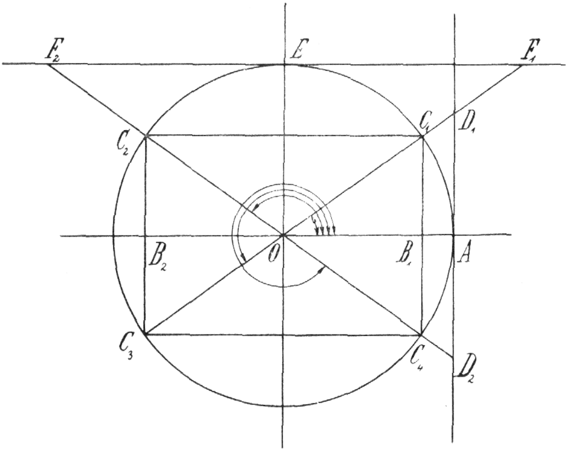
§ 25. Die Grenzen der goniometrischen Funktionen der Winkel von 0°—360°.

Dem absoluten Werte nach sind die Grenzen der goniometrischen Funktionen im II., III. und IV. Quadranten dieselben wie im I. Berücksichtigt man die im vorigen § festgestellten Vorzeichen, so ergeben sich für die Vielfachen von 90° die folgenden Werte:

$\alpha =$	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sin α	0	$+1$	0	-1	0
cos α	$+1$	0	-1	0	$+1$
tg α	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0
ctg α	$+\infty$	0	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$

§ 26. Zurückführung der Funktionen beliebiger Winkel auf die Funktionen spitzer Winkel.

Wir bestimmen, daß α für die folgenden Betrachtungen stets als spitzer Winkel aufzufassen ist.



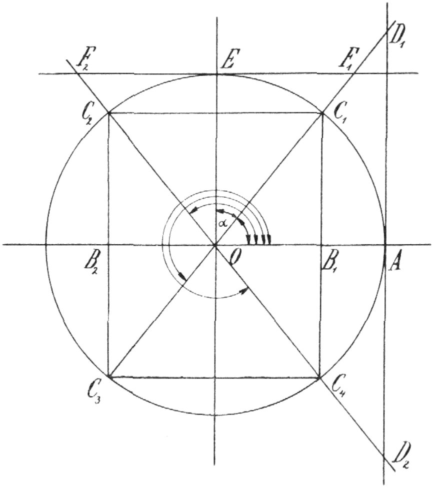
1. In der Figur sind die Funktionswerte von α, $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ und $360 - \alpha$ durch Strecken dargestellt. Da die Dreiecke $O B_1 C_1$, $O B_2 C_2$, $O B_2 C_3$ und $O B_1 C_4$ unter sich kongruent sind, ebenso die Dreiecke $O E F_1$ und $O E F_2$, so sind ihre homologen Seiten gleich. Daraus folgt, daß die sinus Funktionen dieser 4 Winkel dem **absoluten Werte nach gleich sind. Dasselbe gilt von der cosinus, der tangens und der cotangens Funktion.**

Mit Rücksicht auf die in § 24 festgestellten Vorzeichen ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\quad & \sin(180^0 - \alpha) = + \sin\alpha \\
& \cos(180^0 - \alpha) = - \cos\alpha \\
& \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = - \operatorname{tg}\alpha \\
& \operatorname{ctg}(180^0 - \alpha) = - \operatorname{ctg}\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b)}\quad & \sin(180^0 + \alpha) = - \sin\alpha \\
& \cos(180^0 + \alpha) = - \cos\alpha \\
& \operatorname{tg}(180^0 + \alpha) = + \operatorname{tg}\alpha \\
& \operatorname{ctg}(180^0 + \alpha) = + \operatorname{ctg}\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{c)}\quad & \sin(360^0 - \alpha) = - \sin\alpha \\
& \cos(360^0 - \alpha) = + \cos\alpha \\
& \operatorname{tg}(360^0 - \alpha) = - \operatorname{tg}\alpha \\
& \operatorname{ctg}(360^0 - \alpha) = - \operatorname{ctg}\alpha
\end{aligned}
$$



2. Nach der Figur ist

$$\sphericalangle\, C_1OE = \sphericalangle\, C_2OE = \alpha$$

daher $\sphericalangle AOC_1 = 90^0 - \alpha$
$\sphericalangle AOC_2 = 90^0 + \alpha$
$\sphericalangle AOC_3 = 270^0 - \alpha$
$\sphericalangle AOC_4 = 270^0 + \alpha$

Aus der Figur sind die folgenden Beziehungen ohne weiteres ersichtlich:

a) $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$
$\mathrm{tg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(90^0 - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$ (siehe § 8)

b) $\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$
$\mathrm{tg}(90^0 + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(90^0 + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

c) $\sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha$
$\mathrm{tg}(270^0 - \alpha) = +\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(270^0 - \alpha) = +\mathrm{tg}\,\alpha$

d) $\sin(270^0 + \alpha) = -\cos\alpha$
$\cos(270^0 + \alpha) = +\sin\alpha$
$\mathrm{tg}(270^0 + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}(270^0 + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$

Regel: Bezieht man den Winkel auf ein gerades Vielfaches von 90^0 (0^0, 180^0, 360^0), so bleibt die Funktion, bezieht man ihn auf ein ungerades Vielfaches von 90^0 (90^0, 270^0), so geht die Funktion über in die Kofunktion des spitzen Winkels α. Über das Vorzeichen entscheidet der Quadrant.

Anmerkung. Die in §§ 8, 9, 10 und 11 für spitze Winkel bewiesenen Fundamentalbeziehungen gelten allgemein für beliebige Winkel.

IV. Abschnitt.
Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

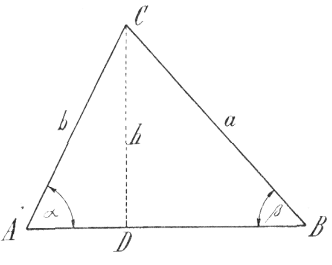
§ 27. Allgemeines.

Die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks unter Zuhilfenahme einer Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke ist zwar möglich, aber sie gestaltet sich durchweg umständlich und zu schwerfällig. Es ist deshalb vorteilhaft, am schiefwinkligen Dreieck selbst Beziehungen aufzusuchen, die zwischen den Seiten und den Funktionen der Dreieckswinkel unbedingt vorhanden sein müssen, weil nach der Ähnlichkeitslehre das Verhältnis der Dreiecksseiten die Winkel bestimmt und umgekehrt. Diese Beziehungen sind in dem Sinus-Satz, dem Cosinus-Satz und dem Tangens-Satz ausgesprochen.

§ 28. Der Sinus-Satz.

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die sinus Funktionen der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Beh. $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.



Beweis. Fällt man von C aus auf die Gegenseite das Lot h, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD. In diesen ist:

$$\frac{h}{b} = \sin\alpha$$

$$\frac{h}{a} = \sin\beta$$

Durch Division erhält man

$$\frac{h}{b} \cdot \frac{a}{h} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

oder $\quad$ **$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$.**

Anmerkung 1. Die beiden übrigen aus der Behauptung abzuleitenden Proportionen lassen sich analog beweisen, wenn man das Lot von A bzw. von B auf die Gegenseite fällt.

Anmerkung 2. Da die sinus Funktionen zweier Supplementwinkel einander gleich sind, so gilt der Sinus-Satz in derselben Form auch für das stumpfwinklige Dreieck.

Anmerkung 3. Anwendungen des Sinus-Satzes. Der Sinus-Satz kommt zur Anwendung, wenn gegeben sind:

a) eine Seite und zwei Winkel

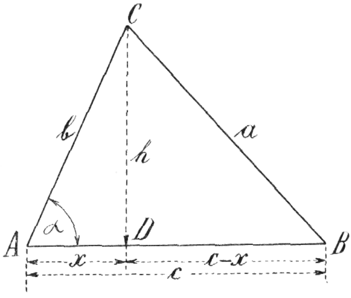
b) zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel.

Man sucht demnach im Falle **a** eine **Seite**, im Falle **b** einen **Winkel**.

§ 29. Der Cosinus-Satz.

In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Beh. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos\alpha.$



Beweis. Fällt man die Höhe CD = h und bezeichnet die beiden Abschnitte der Seite c mit x und c — x, so ist

$$h^2 = b^2 - x^2$$

$$h^2 = a^2 - (c - x)^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2\,cx - x^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2 + 2\,cx$$
$$2\,cx = b^2 + c^2 - a^2$$
$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,c}$$

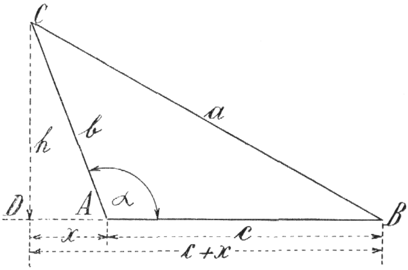
Dividiert man diese Gleichung durch b, so erhält man

$$\frac{x}{b} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

Nun ist $\frac{x}{b} = \cos\alpha$, also

$$\mathbf{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}}$$

oder
$$2\,bc \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b \cdot c \cdot \cos\alpha.}$$



Es ist nun zu untersuchen, ob der Cosinussatz in derselben Form auch für ein Dreieck gilt, in dem $\sphericalangle\,\alpha$ stumpf ist.

Bew. $h^2 = b^2 - x^2$
$h^2 = a^2 - (c + x)^2$

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c + x)^2$$
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - 2\,cx - x^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2 - 2\,cx$$
$$-2\,cx = b^2 + c^2 - a^2$$
$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{-2\,c}.$$

Nun ist

$$\frac{x}{b} = \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha \text{ (siehe § 26, a!)}$$

also
$$-\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{-2\,bc}$$

$$2\,bc \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos\alpha.}$$

Der Cosinus-Satz gilt somit allgemein für spitzwinklige und für stumpfwinklige Dreiecke.

Anwendungen des Cosinus-Satzes. Der Cosinus-Satz kommt zur Anwendung, wenn gegeben sind:

a) **zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel** und die dritte Seite berechnet werden soll;

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos\alpha$$

$$\mathbf{a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot \cos\alpha}}$$

b) **alle drei Seiten** und die Winkel berechnet werden sollen;

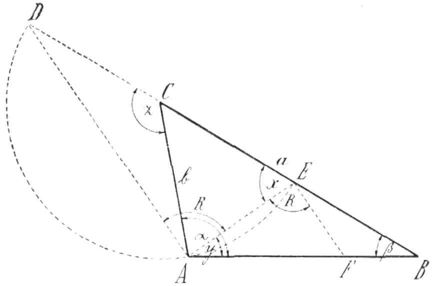
$$\mathbf{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}}.$$

§ 30. Der Tangens-Satz.

In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zur Differenz derselben beiden Seiten wie die Tangente der *halben Summe ihrer Gegenwinkel zur Tangente der halben* Differenz derselben.

Beh. $(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

Beweis. Man mache BD = BC + AC = a + b und BE = BC — AC = a — b, verbinde D und E mit A und ziehe durch E die Parallele EF zu AD; dann entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke DAE und AEF (nach dem Satze: Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter).



Es läßt sich nun nachweisen, daß $\sphericalangle\ x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ und $\sphericalangle\ y = \frac{\alpha - \beta}{2}$ ist. Nämlich:

$\sphericalangle\ z = \alpha + \beta$ (als Außenwinkel vom $\triangle$ ABC)

$\sphericalangle\ z = 2\,x$ (als „ des gleichsch. $\triangle$ ACE)

$$2\,x = \alpha + \beta$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Ferner $\sphericalangle\ x = \beta + y$ (als Außenwinkel vom $\triangle$ AEB)

$$\sphericalangle\ y = x - \beta$$

Setzt man den für x gefundenen Wert ein, so wird

$$\sphericalangle\ y = \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta$$

$$\sphericalangle\ y = \frac{\alpha + \beta - 2\beta}{2}$$

$$\sphericalangle\ y = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Nun ist $\quad \operatorname{tg} x = \frac{AD}{AE}$ und $\operatorname{tg} y = \frac{EF}{AE}$.

Durch Division der beiden Gleichungen entsteht

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{AD}{AE} \cdot \frac{AE}{EF}$$

oder $$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = AD : EF.$$

Da nun nach Konstruktion $AD \parallel EF$, so ist auch

$$AD : EF = BD : BE$$

daher $$BD : BE = \operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y.$$

Das aber ist

$$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) : \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Anwendung des Tangens-Satzes. Der Tangens-Satz kommt zur Anwendung, wenn

zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind und die beiden anderen Winkel berechnet werden sollen.

Im vorliegenden Falle müssen die Seiten a und b und der $\sphericalangle \gamma$ gegeben sein. Man kennt dann in der Proportion die drei Glieder: $(a + b)$, $(a - b)$, $\frac{\alpha + \beta}{2}$. Man hat daher für die Berechnung die Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{(a - b) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{a + b}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die halbe Winkeldifferenz. Die Winkel α und β findet man darauf durch einfache Addition und Subtraktion der für $\frac{\alpha + \beta}{2}$ und $\frac{\alpha - \beta}{2}$ gefundenen Werte.

Anmerkung. Addiert man zum Schlusse die drei Winkel α, β und γ, so erhält man als Summe stets 180°, gleichgültig, ob die trigonometrische Rechnung richtig ist oder nicht. Der Grund dafür liegt darin, daß beide Winkel α und β von dem für $\frac{\alpha - \beta}{2}$ gefundenen Werte abhängig sind in dem Sinne, daß der eine Winkel durch die Addition um ebensoviel zu groß oder zu klein wird, wie der andere sich durch die Subtraktion zu klein oder zu groß ergibt. Man darf also aus der Tatsache, daß $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ werden, keinen Schluß auf die Richtigkeit der trigonometrischen Rechnung, sondern nur auf die Richtigkeit der Addition ziehen.

Die Richtigkeit der Rechnung prüft man am schärfsten, wenn man die dritte Seite c zweimal nach dem Sinus-Satze berechnet, und zwar einmal unter Verwendung des berechneten Winkels α und das andere Mal mit Benutzung von β

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}.$$

Die stets vorhandene Abweichung der beiden Werte von einander darf bei richtiger Rechnung nur **relativ klein** sein.

V. Abschnitt. Goniometrie.

§ 31. Allgemeines.

Die Goniometrie entwickelt die Formeln, welche die Beziehungen zwischen den goniometrischen Funktionen desselben Winkels oder verschiedener Winkel angeben. Diese Formeln werden zunächst zur Vereinfachung der in der Trigonometrie errechneten Resultate verwendet; sie können aber auch bei rein algebraischen Entwickelungen mit Vorteil gebraucht werden.

§ 32. Zusammenstellung der Formeln aus den §§ 9, 10, 11.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad . \quad . \quad \text{Formel } 1$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \quad . \quad . \quad \text{„} \quad 2$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad \text{„} \quad 3$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{„} \quad 4$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{„} \quad 5$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{„} \quad 6$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{„} \quad 7.$$

§ 33. Anwendungen der Formeln 1—7.

Aufgabe 1. Es sollen die Funktionen $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ durch die Funktion $\sin\alpha$ ausgedrückt werden.

Lösung a) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ (nach Formel 3)

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \quad . \quad . \quad \text{Formel } 8$$

c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha} \quad . \quad . \quad \text{Formel } 9.$$

Aufgabe 2. Es sollen die Funktionen $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{ctg}\alpha$ durch die Funktion $\cos\alpha$ ausgedrückt werden.

Lösung a) $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$ (nach Formel 2)

b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \quad . \quad . \quad \text{Formel 10}$$

c) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\mathbf{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} \quad . \quad \text{Formel 11.}$$

Aufgabe 3. Es sollen die Funktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, und $\operatorname{ctg}\alpha$ durch die Funktion $\operatorname{tg}\alpha$ ausgedrückt werden.

Lösung a) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$$

$$\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\mathbf{sin}\,\alpha = \frac{\mathbf{tg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathbf{tg}^2\alpha}} \quad . \quad . \quad \text{Formel 12}$$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha\,(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathbf{cos}\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{tg}^2\,\alpha}} \quad .\ .\ \text{Formel 13}$$

c) $$\mathbf{ctg}\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{tg}\,\alpha} \quad \text{(nach Formel 7.)}$$

Aufgabe 4. Es sollen die Funktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ und $\mathrm{tg}\,\alpha$ durch die Funktion $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ausgedrückt werden.

Lösung a) $$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1 - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha\,(1 + \mathrm{ctg}^2\alpha) = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{1 + \mathrm{ctg}^2\alpha}$$

$$\mathbf{sin}\,\alpha = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{ctg}^2\,\alpha}} \quad .\ .\ \text{Formel 14}$$

b) $$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \cos^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \cos^2\alpha$$

$$\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \mathrm{ctg}^2\,\alpha$$

$$\mathrm{ctg}^2\,\alpha = \cos^2\alpha\,(1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha)$$

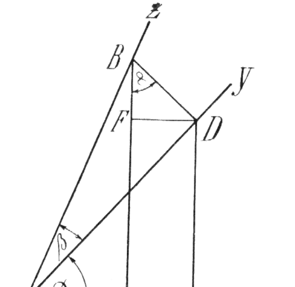
$$\cos^2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha}{1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha}} \quad . \quad \text{Formel 15.}$$

c) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$ (nach Formel 6.)

§ 34. Die Funktionen von Winkelsummen.

Gegeben: sin, cos, tg und ctg α und β.
Gesucht: sin, cos, tg und ctg $(\alpha + \beta)$.



Lösung: Man mache $\sphericalangle$ XAY $= \alpha$ und trage an AY in A den $\sphericalangle\,\beta$ an, sodaß $\sphericalangle$ XAZ $= \alpha + \beta$ ist. Darauf wähle man auf AZ den Punkt B beliebig und fälle von B auf AX und AY Lote mit den Fußpunkten C und D. Ferner sei DE parallel BC und DF parallel AX. Dann ist $\sphericalangle$ DBF $= \sphericalangle\,\alpha$ und nach Figur erhält man:

a) $\sin(\alpha + \beta) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE + BF}{AB} = \dfrac{DE}{AB} + \dfrac{BF}{AB}$.

Da sowohl DE und AB, als auch BF und AB nicht Seiten ein und desselben rechtwinkligen Dreiecks sind, erweitere man den Bruch $\dfrac{DE}{AB}$ mit AD, der gemeinsamen Seite der Dreiecke DAB und DAE, den Bruch

$\frac{BF}{AB}$ mit BD, der gemeinsamen Seite der Dreiecke BDF und BDA; es folgt dann:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{DE}{AB}\cdot\frac{AD}{AD} + \frac{BF}{AB}\cdot\frac{BD}{BD}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{DE}{AD}\cdot\frac{AD}{AB} + \frac{BF}{BD}\cdot\frac{BD}{AB}.$$

Das aber ist:

$$\mathbf{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta.} \qquad \text{Formel 16}$$

b) $\cos(\alpha+\beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{AE - DF}{AB} = \frac{AE}{AB} - \frac{DF}{AB}.$

Durch Erweiterung des Bruches $\frac{AE}{AB}$ mit AD, des Bruches $\frac{DF}{AB}$ mit BD ergibt sich:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AE}{AB}\cdot\frac{AD}{AD} - \frac{DF}{AB}\cdot\frac{BD}{BD}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AE}{AD}\cdot\frac{AD}{AB} - \frac{DF}{BD}\cdot\frac{BD}{AB}.$$

Das aber ist:

$$\mathbf{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta.} \qquad \text{Formel 17}$$

c) $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Man dividiere Zähler und Nenner durch das Produkt $\cos\alpha\cdot\cos\beta$, dann ist:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}} \qquad \text{Formel 18}$$

d) $$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta}.$$

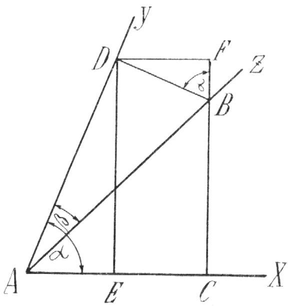
Indem man Zähler und Nenner durch das Produkt $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ dividiert, folgt:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} - \dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}$$

$$\mathbf{ctg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathbf{ctg}\,\alpha\cdot\mathbf{ctg}\,\beta - \mathbf{1}}{\mathbf{ctg}\,\beta + \mathbf{ctg}\,\alpha} \qquad \text{Formel 19.}$$

§ 35. Die Funktionen von Winkeldifferenzen.

Gegeben: sin, cos, tg und ctg α und β.
Gesucht: sin, cos, tg und ctg $(\alpha - \beta)$.



Lösung: $\sphericalangle$ XAY sei gleich α, $\sphericalangle$ YAZ $= \beta$; daher ergibt sich $\sphericalangle$ ZAX $= \alpha - \beta$. Nimmt man auf AZ den Punkt B beliebig an und fällt auf AX und AY Lote mit den Fußpunkten C und D, macht dann DE $\perp$ AX und DF $\perp$ BC, so ist $\sphericalangle$ DBF $= \alpha$.

Aus der Figur folgt dann:

a) $$\sin(\alpha-\beta) = \frac{BC}{AB} = \frac{DE - BF}{AB} = \frac{DE}{AB} - \frac{BF}{AB}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{DE}{AB}\cdot\frac{AD}{AD} - \frac{BF}{AB}\cdot\frac{BD}{BD}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{DE}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} - \frac{BF}{BD} \cdot \frac{BD}{AB}$$

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.} \quad \text{Form. 20}$$

b) $$\cos(\alpha - \beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{AE + DF}{AB} = \frac{AE}{AB} + \frac{DF}{AB}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AD}{AD} + \frac{DF}{AB} \cdot \frac{BD}{BD}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} + \frac{DF}{BD} \cdot \frac{BD}{AB}$$

$$\mathbf{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos \cdot \beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.} \quad \text{Form. 21}$$

c) $$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{Formel 22}$$

d) $$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} = \frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}}{\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta}}$$

$$\mathbf{\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}} \quad . \quad \text{Formel 23.}$$

§ 36. Berechnung der Funktionen des doppelten aus den Funktionen des einfachen Winkels.

Gegeben: sin, cos, tg, ctg α.

Gesucht: sin, cos, tg und ctg 2α.

Lösung: Setzt man in den Formeln des § 34 $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \alpha$, so ergeben sich die Funktionen des Winkels 2α aus den Funktionen von α, und zwar ist:

a) $$\sin 2\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{Formel 24}$$

b) $$\cos 2\alpha = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha$$

$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Formel 25.}$$

Berücksichtigt man, daß

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

ist, so folgt:

$$\mathbf{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1} \quad \text{Formel 26}$$

c) $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{Formel 27}$$

d) $$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$$

$$\mathbf{\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha}} \quad . \quad . \quad \text{Formel 28.}$$

§ 37. Berechnung der Funktionen eines Winkels aus den Funktionen des halben Winkels.

Gegeben: sin, cos, tg und ctg $\frac{\alpha}{2}$.

Gesucht: sin, cos, tg und ctg α.

Lösung: Da der Winkel 2α zu α in demselben Verhältnis steht wie α zu $\frac{\alpha}{2}$, so erhält man aus den Formeln von § 36 ohne weiteres:

a) $$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots \quad \text{Formel 29}$$

b) $$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots \quad \text{Formel 30}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \quad \text{Formel 31}$$

c) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots \quad \text{Formel 32}$$

d) $$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} \quad \ldots\ldots \quad \text{Formel 33.}$$

§ 38. Berechnung der Funktionen des halben Winkels aus den Funktionen des ganzen Winkels.

Gegeben: sin, cos, tg und ctg α.

Gesucht: sin, cos, tg und ctg $\frac{\alpha}{2}$.

Lösung: a) Aus $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (s. Form. 31) folgt:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \quad . \quad \text{Formel 34}$$

b) Aus $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ erhält man:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\mathbf{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}} \quad . \quad \text{Formel 35.}$$

c) Da $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, so ergibt sich unter Verwendung der Formeln dieses §:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}} \quad . \quad . \quad \text{Formel 36}$$

d) Weil $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ ist, folgt:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}}$$

$$\mathbf{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}} \quad . \quad \text{Formel 37.}$$

§ 39. Formeln für sin 3 α und cos 3 α.

a) Man setze $3\alpha = \alpha + 2\alpha$; dann ist:

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha$$
$$\sin 3\alpha = \sin\alpha\,(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\sin 3\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$$
$$\sin 3\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\,(1 - \sin^2\alpha)$$
$$\sin 3\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\mathbf{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{Formel 38.}$$

b) $\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha$

$$\cos 3\alpha = \cos\alpha\,(2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\,(1 - \cos^2\alpha) \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

$$\mathbf{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{Formel 39.}$$

§ 40. Umformung einer Summe oder Differenz von Funktionen verschiedener Winkel in Produkte.

Um eine logarithmische Auswertung solcher Ausdrücke zu ermöglichen, die die Summe oder Differenz von Funktionen verschiedener Winkel enthalten, ist die Umformung dieser Summen oder Differenzen in Produkte erforderlich.

a) Nach den Formeln der §§ 34 und 35 ist:

$$\sin(\gamma + \delta) = \sin\gamma \cdot \cos\delta + \cos\gamma\ \sin\delta \qquad (1)$$
$$\sin(\gamma - \delta) = \sin\gamma \cdot \cos\delta - \cos\gamma \cdot \sin\delta \qquad (2)$$

Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$\sin(\gamma + \delta) + \sin(\gamma - \delta) = 2\sin\gamma \cdot \cos\delta.$$

Setzt man nun: $\gamma + \delta = \alpha$
$\gamma - \delta = \beta,$

so erhält man:

$$2\gamma = \alpha + \beta; \qquad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$2\delta = \alpha - \beta; \qquad \delta = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte ergibt sich:

$$\mathbf{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{Formel 40}$$

b) Subtrahiert man Gleichung 2 von Gleichung 1, so folgt:

$$\sin(\gamma + \delta) - \sin(\gamma - \delta) = 2\cos\gamma\ \sin\delta \quad \text{oder}$$

$$\mathbf{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{Formel 41}$$

c) $\cos(\gamma + \delta) = \cos\gamma\ \cos\delta - \sin\gamma\ \sin\delta \quad (3)$

$\cos(\gamma - \delta) = \cos\gamma\cdot\cos\delta + \sin\gamma\cdot\sin\delta \quad (4)$

Durch Addition der Gleichungen 3 und 4 entsteht:

$$\cos(\gamma + \delta) + \cos(\gamma - \delta) = 2\cos\gamma\cdot\cos\delta.$$

$$\mathbf{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{Formel 42}$$

d) Durch Subtraktion der Gleichung 4 von Gleichung 3 erhält man:

$$\cos(\gamma + \delta) - \cos(\gamma - \delta) = -2\sin\gamma\cdot\sin\delta$$

oder:

$$\mathbf{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \text{Form. 43}$$

e) $$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\beta = \frac{\mathbf{sin}\,(\alpha+\beta)}{\mathbf{cos}\,\alpha\cdot\mathbf{cos}\,\beta} \quad . \quad . \quad \text{Formel 44}$$

f) $$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

$$\mathbf{tg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\beta = \frac{\mathbf{sin}\,(\alpha-\beta)}{\mathbf{cos}\,\alpha\cdot\mathbf{cos}\,\beta} \quad . \quad . \quad \text{Formel 45}$$

g) $$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin\beta\cdot\cos\alpha + \cos\beta\ \sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

$$\mathbf{ctg}\,\alpha + \mathbf{ctg}\,\beta = \frac{\mathbf{sin}\,(\beta+\alpha)}{\mathbf{sin}\,\alpha\cdot\mathbf{sin}\,\beta} \quad . \quad . \quad \text{Formel 46}$$

$$\mathbf{ctg}\,\alpha - \mathbf{ctg}\,\beta = \frac{\mathbf{sin}\,(\beta-\alpha)}{\mathbf{sin}\,\alpha\cdot\mathbf{sin}\,\beta} \quad . \quad . \quad \text{Formel 47.}$$

VI. Abschnitt.
Anwendungen der Goniometrie.

§ 41. Berechnung eines Dreieckswinkels aus den drei Seiten.

Gegeben: a, b, c.

Gesucht: α.

Lösung: Nach Formel 35 ist:

a) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Zufolge des Cosinus-Satzes hat man:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \qquad (2)$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung 1 ein, so folgt:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{4\,bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4\,bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{4\,bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a + b + c)\,(-a + b + c)}{4\,bc}}$$

Zur Vereinfachung nehme man nun den Umfang des Dreiecks $a + b + c = 2\,s$ an.

Subtrahiert man beiderseits $2\,a$, so ist:

$$-a + b + c = 2\,s - 2\,a$$

oder $$-a + b + c = 2\,(s - a)$$

und daher: $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2\,s \cdot 2\,(s - a)}{4\,bc}}$$

$$\mathbf{\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s - a)}{bc}}} \quad . \quad . \quad \text{Formel 48}$$

b) Nach Formel 34 ist:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

Setzt man darin:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc},$$

so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{4\,bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4\,bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{4\,bc}}$$

Es sei wiederum:

$$a + b + c = 2\,s.$$

Durch Subtraktion von 2 b folgt:

$$a - b + c = 2\,(s - b),$$

durch Subtraktion von 2 c:

$$a + b - c = 2\,(s - c).$$

Mit Benutzung dieser Werte ergibt sich:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2\,(s - b)\;2\,(s - c)}{4\,bc}}$$

$$\mathbf{\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{bc}}}\quad.\qquad \text{Formel 49}$$

c) Da $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, so erhält man mittels der Formeln 49, 48:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s\,(s - a)}{bc}}}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{s\,(s - a)}}}\qquad \text{Formel 50a}$$

Erweitert man den Radikanden mit (s — a), so folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \qquad \text{Form. 50b}$$

Diese Umformung gewährt den Vorteil, daß bei Berechnung der drei Winkel des Dreiecks der Wurzelausdruck unverändert bleibt.

d) $$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} \qquad \text{Formel 51.}$$

Anmerkung: Die unter a, b, c und d entwickelten Formeln werden als **Halbwinkelformeln** bezeichnet. Man bedient sich ihrer, um aus drei Seiten eines Dreiecks einen Winkel zu berechnen. Sie liefern logarithmierbare Ausdrücke und sind daher für den angegebenen Fall der trigonometrischen Rechnung ein bequemeres Hilfsmittel als der Cosinus-Satz. Besonders sei auf die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

aufmerksam gemacht.

α ist spitz, recht oder stumpf, je nachdem

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \lesseqgtr 1$$

oder

$$\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)} \lesseqgtr 1.$$

Beide Formeln gestatten daher eine rasche Orientierung über die Form des Dreiecks.

e) Nach Formel 29 ist:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Setzt man
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$
so folgt:
$$\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{s(s-a)}{bc}}$$
$$\sin\alpha = 2\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2\,c^2}}$$
$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{Form. 52.}$$

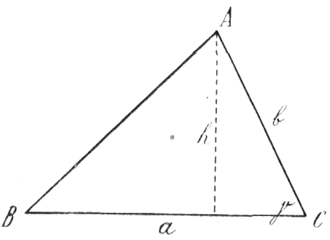
Anmerkung: Auch diese Formel bietet die Möglichkeit, den Cosinus-Satz zu umgehen, wenn aus den Seiten des Dreiecks ein Winkel berechnet werden soll. Sie hat vor dem Cosinus-Satze ebenfalls den Vorteil voraus, logarithmierbare Ausdrücke zu liefern.

§ 42. Trigonometrische Flächenberechnungen.

1. Man berechne die Fläche F eines Dreiecks aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Gegeben: a, b, $\sphericalangle\,\gamma$.

Gesucht: F.



Lösung: Man fälle auf a die Höhe h, dann ist:
$$F = \frac{a}{2}\,h.$$
Zur Berechnung von h folgt:
$$\frac{h}{b} = \sin\gamma$$
$$h = b\,\sin\gamma$$

und durch Einsetzung: $\mathbf{F = \frac{ab}{2}\sin\gamma}$. Formel 53a

In analoger Weise erhält man die Formeln:

$$F = \frac{ac}{2} \sin\beta \quad . \quad . \quad \text{Formel 53b}$$

$$F = \frac{bc}{2} \sin\alpha \quad . \quad . \quad \text{Formel 53c.}$$

Satz: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier Seiten mal dem sin des eingeschlossenen Winkels.

2. Man berechne die Fläche eines Dreiecks aus einer Seite und den Winkeln.

Gegeben: $a,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$.
Gesucht: F.
Lösung: Nach Formel 53a ist:

$$F = \frac{ab}{2} \sin\gamma.$$

Zur Berechnung von b bedient man sich des Sinus-Satzes:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Daher:

$$F = \frac{a}{2} \cdot \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \sin\gamma$$

$$F = \frac{a^2 \sin\beta \ \sin\gamma}{2 \sin\alpha} \quad . \quad . \quad \text{Formel 54a}$$

Die analogen Formeln sind:

$$F = \frac{b^2 \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{2 \sin\beta} \quad . \quad . \quad \text{Formel 54b}$$

$$F = \frac{c^2 \sin\alpha \ \sin\beta}{2 \sin\gamma} \quad . \quad . \quad \text{Formel 54c.}$$

3. Man berechne die Fläche eines Dreiecks aus den drei Seiten a, b und c.

Gegeben: a, b, c.

Gesucht: F.

Lösung: Nach Formel 53c ist:

$$F = \frac{bc}{2} \sin \alpha.$$

Für $\sin \alpha = \frac{2}{bc} \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)}$

ergibt sich:

$$F = \frac{bc}{2} \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)}$$

$$\mathbf{F = \sqrt{s (s - a) (s - b) (s - c)}} \qquad \text{Formel 55.}$$

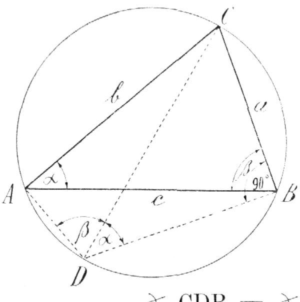
4. Man berechne die Fläche F des Dreiecks aus dem Radius r des Umkreises und den Winkeln.

Gegeben: r, α, β, γ.

Gesucht: F.

Lösung: Nach Formel 53a ist:

$$F = \frac{ab}{2} \sin \gamma. \qquad (1)$$



Um a und b durch den Radius r des Umkreises und die Winkel auszudrücken, ziehe man den Durchmesser des Umkreises CD = 2 r und verbinde D mit B; dann ist nach dem Satze des Thales

$$\sphericalangle\, CBD = R;$$

$$\sphericalangle\, CDB = \sphericalangle\, CAB = \alpha,$$

weil Peripheriewinkel über derselben Sehne gleich sind und

$$\frac{a}{2\,r} = \sin\alpha$$

$$\mathbf{a = 2\,r\,\sin\alpha} \quad . \; . \quad \text{Formel 56a}$$

Zieht man AD, so ergibt sich $\sphericalangle$ ADC $= \beta$; $\sphericalangle$ DAC $=$ R und

$$\frac{b}{2\,r} = \sin\beta$$

$$\mathbf{b = 2\,r\,\sin\beta} \quad . \; . \quad \text{Formel 56b}$$

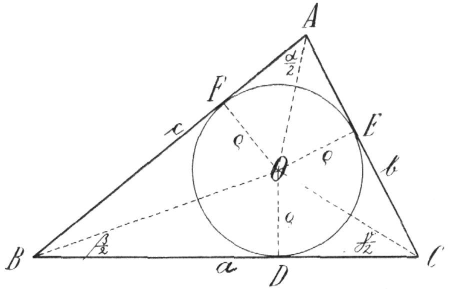
Analog folgt: $\mathbf{c = 2\,r\,\sin\gamma} \quad . \; . \quad$ Formel 56c.

Setzt man die Werte für a und b in 1 ein, so erhält man:

$$F = \frac{2\,r\,\sin\alpha \cdot 2\,r\,\sin\beta \cdot \sin\gamma}{2}$$

$$\mathbf{F = 2\,r^2 \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \quad . \; . \quad \text{Formel 57.}$$

5. Man berechne die Fläche des Dreiecks ABC aus dem Radius des Inkreises ρ und den Winkeln α, β und γ.



Gegeben: ρ, α, β, γ.
Gesucht: F.

Lösung: Nach Figur ist:

$$F = \frac{a\rho}{2} + \frac{b\rho}{2} + \frac{c\rho}{2}$$

$$F = \frac{a + b + c}{2}\,\rho = s \cdot \rho.$$

Weiter hat man:

$$s = AF + BD + CE$$

$$s = \rho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \rho \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \rho \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$s = \rho\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right).$$

Daher: $F = \rho^2\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right).$

Nun ist: $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^0$

$$\frac{\gamma}{2} = 90^0 - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}.$$

Also: $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - 1}$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - 1}$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} - 1}$$

$$= \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

Folglich entsteht:

$$\mathbf{F = \rho^2 \cdot ctg \frac{\alpha}{2} \cdot ctg \frac{\beta}{2} \cdot ctg \frac{\gamma}{2}} \qquad \text{Formel 58.}$$

Anhang.

1. Die Mollweidischen Gleichungen.

Man beweise, daß

a) $(a + b) : c = \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

b) $(a - b) : c = \sin \frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Beweis. a) Nach dem Sinus-Satze ist:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$
$$(a + b) : c = (\sin \alpha + \sin \beta) : \sin \gamma.$$

Setzt man $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

so folgt:

$$(a + b) : c = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

oder $\quad \mathbf{(a + b) : c = cos \frac{\alpha - \beta}{2} : cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \qquad$ Formel 59.

b) Aus $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ ergibt sich:

$$(a - b) : c = (\sin\alpha - \sin\beta) : \sin\gamma.$$

Nun ist: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Daher:

$$(a - b) : c = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\mathbf{(a - b) : c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \text{Formel 60.}$$

Anmerkung. Durch Division der Proportionen

$$(a + b) : c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

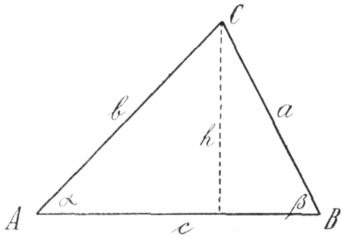
$$(a - b) : c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ergibt sich der Tangens-Satz.

2. Es ist zu beweisen, daß

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta} \qquad \text{ist.}$$

Beweis. Nach dem Sinus-Satz ergibt sich:



$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

oder

$$b\sin\alpha = a\sin\beta. \quad (1)$$

Nach Figur erhält man:

$$b\cos\alpha = c - a\cos\beta \; (2)$$

Indem man die Gleichungen 1 und 2 dividiert, folgt:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{a\,sin}\,\beta}{\mathbf{c - a\,cos}\,\beta}. \qquad \text{Formel 61.}$$

Diese Formel, welche eine Beziehung zwischen vier aufeinanderfolgenden Stücken des Dreiecks α, c, β und a enthält, wird als **separierter Tangens-Satz** bezeichnet.

3. **Umformung des Cosinus-Satzes,** um ihn für die logarithmische Auswertung geeignet zu machen.

Nach § 29 ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha.$$

Addiert und subtrahiert man auf der rechten Seite dieser Gleichung 2 bc, so folgt:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bc - 2\,bc - 2\,bc\cos\alpha$$

oder $a^2 = (b + c)^2 - 2\,bc\,(1 + \cos\alpha)$.

Nun ist: $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

also: $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Daher: $a^2 = (b + c)^2 - 4\,bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Durch Division dieser Gleichung mit $(b + c)^2$ entsteht:

$$\frac{a^2}{(b+c)^2} = 1 - \frac{4\,bc\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(b+c)^2}$$

oder

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = 1 - \frac{4\,bc\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(b+c)^2}.$$

Offenbar ist nun $\frac{a}{b+c} < 1$, da in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite ist. Setzen wir daher $\frac{a}{b+c}$ gleich dem sin eines vor der Hand noch nicht bekannten Hilfswinkels φ, so ist:

$$\sin^2\varphi = 1 - \frac{4\,bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(b+c)^2}$$

und in Übereinstimmung mit der goniometrischen Fundamentalbeziehung:

$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi:$$

$$1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{4\,bc \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{(b + c)^2}$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{4\,bc \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{(b + c)^2}$$

$$\mathbf{\cos \varphi = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2} \sqrt{bc}}{b + c}}.$$

Hat man danach den $\sphericalangle\ \varphi$ berechnet, so ergibt sich leicht:

$$\frac{a}{b + c} = \sin \varphi$$

und die verlangte Seite a wird daher:

$$\mathbf{a = (b + c) \sin \varphi}.$$

Im Verlag des Verbandes sind bisher erschienen und durch den Buchhandel sowie durch die Geschäftsstelle des Verbandes — Jlmenau, Schloßstr. 24 — zu beziehen:

G. Dreyer.
Hülfstabellen zum Brückenbau.

G. Dreyer.
Sammlung von Formeln und Definitionen aus der Festigkeitslehre.

K. Metzler.
Die Berechnung von Drehstromgeneratoren.

O. Regel.
Die Berechnung einer eingleisigen Eisenbahnbrücke von 72,8 m Stützweite.

G. Dreyer.
Formulare für statische Berechnungen.

K. Götze und G. Ohrt.
Lehrbuch der ebenen Trigonometrie.